แบบทดสอบประจำบทที่ 1
ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์

1. ลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

(1) $a_n = \dfrac{2n}{5n-3}$

(2) $a_n = \dfrac{1-n^2}{2+3n^2}$

(3) $a_n = \dfrac{n^2-n+7}{2n^3+n^2}$

(4) $a_n = 1+\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$

(5) $a_n = 2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

(6) $a_n = 1 + (-1)^n$

2. จงตัดสินว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก โดยพิจารณาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในลำดับโดยตรง หรือใช้เครื่องคำนวณช่วยเขียนกราฟของลำดับ หรือใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

(1) $a_n = \dfrac{n-2}{n+13}$

(2) $a_n = (-1)^{n+}\dfrac{1}{n}$

3. เขียน $0.24\dot{9}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

4. จงหาค่า

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+7^n}{9^n}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6}{4k-1}-\frac{6}{4k+3}\right)$

5. อนุกรม $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{2\cdot 6}+\dfrac{1}{3\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+4)}+\ldots$ + เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

Pibbon chomsombat

6. การเล่นบันจีจัมป์ (bungee jump) เป็นกิจกรรมท้าทายที่ผู้เล่นกระโดดลงมาจากที่สูงโดยมีปลายเชือกด้านหนึ่งผูกติดลำตัวหรือหัวเข่าของผู้เล่น ปลายเชือกอีกด้านหนึ่งผูกติดไว้กับฐานกระโดด ชายคนหนึ่งใช้เชือกยาว 250 ฟุต กระโดดบันจีจัมป์จากฐานกระโดด และพบว่าหลังจากในแต่ละครั้งที่เขาดิ่งลงถึงตำแหน่งต่ำสุด เชือกที่มีความยืดหยุ่นสูงจะดึงตัวเขาให้ลอยขึ้นเป็นระยะทาง 55% ของระยะทางที่เขาดิ่งลงถึงตำแหน่งต่ำสุด จงหาระยะทางที่ชายคนนี้เคลื่อนที่ลอยขึ้นและดิ่งลงทั้งหมด

เฉลยแบบทดสอบประจำบทที่ 1

ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{5n-3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n\left(5-\dfrac{3}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{5-\dfrac{3}{n}}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\dfrac{3}{n}\right) = 5$

Pibbon chomsombat

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{5-\frac{3}{n}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 2n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n}\right)} = \dfrac{2}{5}$

ดังนั้น ลำดับ $a_n = \dfrac{2n}{5n-3}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{5n-3} = \dfrac{2}{5}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2}{2+3n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(\frac{1}{n^2}-1\right)}{n^2\left(\frac{2}{n^2}+3\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n^2}-1}{\frac{2}{n^2}+3}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}-1\right) = -1$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}+3\right) = 3$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n^2}-1}{\frac{2}{n^2}+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{n^2}-1\right)}{\left(\frac{2}{n^2}+3\right)} = \dfrac{-1}{3}$

ดังนั้น ลำดับ $a_n = \dfrac{1-n^2}{2+3n^2}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2}{2+3n^2} = \dfrac{-1}{3}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+7}{2n^2+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right)}{n^3\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{2+\frac{1}{n}}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right) = 0$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{2+\frac{1}{n}} = \dfrac{0}{2} = 0$

ดังนั้น ลำดับ $a_n = \dfrac{n^2-n+7}{2n^2+n^2}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+7}{2n^2+n^2} = 0$

(4) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{9}{10}\right)^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n$

$= 1 + 0$

ดังนั้น ลำดับ $a_n = 1+\left(\frac{9}{10}\right)^n$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{9}{10}\right)^n\right) = 1$

Pibbonchomsombat

(5) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

ดังนั้น $a_n = 2-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2$

(6) ลำดับนี้คือ 0, 2, 0, 2, ... ซึ่งไม่มีลิมิต ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

2. (1) พิจารณาค่าของ a_n โดยตรง เมื่อ n มีค่ามากขึ้น n – 2 และ n +13 มีค่าใกล้เคียงกันมาก ลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{n-2}{n+13}$ จึงเท่ากับ 1

ใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตเพื่อสนับสนุนการพิจารณาข้างต้นดังนี้

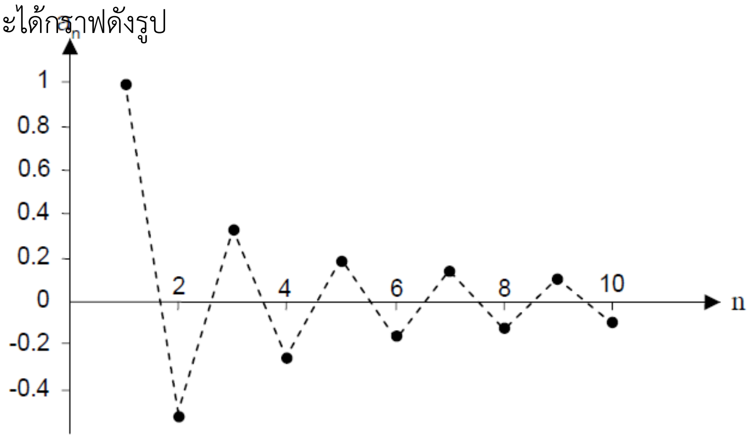
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n+13} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{13}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{13}{n}}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right) = 1$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{13}{n}\right) = 1$

จะได้ $$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{13}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{13}{n}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

ดังนั้น ลำดับ $a_n = \frac{n-2}{n+13}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-2}{n+13} = 3$

(2) คำนวณหาแต่ละพจน์ของลำดับ $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ได้ลำดับ $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ จากนั้นพิจารณาค่าของ a_n โดยตรง หรือเขียนกราฟของลำดับ a_n โดยใช้โปรแกรมประเภทตาราง เช่น Microsoft Excel มาช่วย จะได้กราฟดังรูป



Pibbon chomsombat

จากกราฟ จะเห็นว่า a_n จะเข้าใกล้ 0 เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

ดังนั้น ลำดับ $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim_{n\to\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right) = 0$

3. $0.24\dot{9} = 0.24999...$

$= 0.24 + 0.009 + 0.0009 + 0.00009 + ...$

$= 0.24 + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + ...$

$\frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + ...$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{9}{10^3}$ และ $r = \frac{1}{10}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{10} < 1$ อนุกรม $\frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + ...$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และมีผลบวกเท่ากับ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{9}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}. = \frac{\frac{9}{10^3}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{100} = 0.01$

ดังนั้น $0.24\dot{9} = 0.24 + 0.01 = 0.25 = \frac{1}{4}$

4. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + ... + \frac{2}{3^n} + ...$

เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{2}{3}$ และ $r = \frac{1}{3}$

เนื่องจาก $|r| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$ อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และมีผลบวกเท่ากับ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = 1$

(2) ให้ $S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$

เนื่องจาก $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k)^2-1}$

$= \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

Pibbonchomsombat

จะได้ $S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+7^n}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{9^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n$

$= \frac{1}{1-\frac{2}{9}}+\frac{1}{1-\frac{7}{9}}$

$= \frac{9}{7}+\frac{9}{2} = \frac{18+63}{14} = \frac{81}{14}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+7^n}{9^n} = \frac{81}{14}$

(4) ให้ $S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6}{4k-1}-\frac{6}{4k+3}\right)$

จะได้ $S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6}{4k-1}-\frac{6}{4k+3}\right)$

$= \left(2-\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{6}{7}-\frac{6}{11}\right)+\left(\frac{6}{11}-\frac{6}{15}\right)+\ldots+\left(\frac{6}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)$

$= 2-\frac{6}{4n+3}$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{6}{4n+3}\right) = 2$

Pibbon chomsombat

ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6}{4k-1}-\frac{6}{4k+3}\right) = 2$

5. พิจารณา $\frac{1}{k(k+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+4}\right)$

ดังนั้น $S_n = \frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{2\cdot6}+\frac{1}{3\cdot7}+\ldots+\frac{1}{n(n+4)}$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)\right)$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} s_n =$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{25}{48}$$

ดังนั้น อนุกรม $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{2\cdot6}+\frac{1}{3\cdot7}+\ldots+\frac{1}{n(n+4)}+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และมีผลบวกเท่ากับ $\frac{25}{48}$

6. ระยะทางที่ชายคนนี้เริ่มกระโดดจนถึงตำแหน่งต่ำสุดมีระยะทาง 250 ฟุต

ชายคนนี้จะลอยขึ้นสูงเป็นระยะทาง 55% ของระยะทางที่เขาดิ่งลงถึงตำแหน่งต่ำสุด

มีค่าเท่ากับ $\frac{11}{20}$ ของระยะทางที่เขาดิ่งลงถึงตำแหน่งต่ำสุด

ระยะทางที่ชายคนนี้ลอยขึ้นครั้งที่ 1 แล้วดิ่งลงถึงตำแหน่งต่ำสุดมีระยะทาง

คือ $250\left(\frac{11}{20}\right) + 250\left(\frac{11}{20}\right) = 500\left(\frac{11}{20}\right)$ ฟุต

ระยะทางที่ชายคนนี้ลอยขึ้นครั้งที่ 2 แล้วดิ่งลงถึงตำแหน่งต่ำสุดมีระยะทางคือ

$$250\left(\frac{11}{20}\right)\left(\frac{11}{20}\right) + 250\left(\frac{11}{20}\right)\left(\frac{11}{20}\right) = 500\left(\frac{11}{20}\right)^2 \text{ ฟุต}$$

ระยะทางที่ชายคนนี้ลอยขึ้นแล้วดิ่งลงเป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

จะได้ระยะทางที่ชายคนนี้เคลื่อนที่ลอยขึ้นและดิ่งลงทั้งหมดเท่ากับ

Pibbonchomsombat

$$250+500\left(\frac{11}{20}\right)+500\left(\frac{11}{20}\right)^2+500\left(\frac{11}{20}\right)^3+\ldots$$

$$= 250+500\left(\frac{11}{20}+\left(\frac{11}{20}\right)^2+\left(\frac{11}{20}\right)^3+\ldots\right)$$

$$= 250+500\left(\frac{\frac{11}{20}}{1-\frac{11}{20}}\right)$$

$$= 250+500\left(\frac{11}{9}\right)$$

$$= 861.11$$

ดังนั้น ในการกระโดดบันจีจัมป์ครั้งนี้ ชายคนนี้เคลื่อนที่ลอยขึ้นและดิ่งลงเป็นระยะทางทั้งหมด 861.11 ฟุต

Pibbon chomsombat